Les Seccions Còniques: d'Apol·loni a la geometria projectiva

Laura Brustenga, brust@mat.uab.cat (Martí Prats, mprats@mat.uab.cat)

Departament de Matemàtiques, UAB

5 Novembre 2022

1 Programa de treball

1. Introducció
   1.1. Què és l'horitzó?
   1.2. La perspectiva: acció sobre rectes
   1.3. El pla projectiu: vistes a l'infinit
   1.4. El punt de fuga
   1.5. La perspectiva: acció sobre cercles
   1.6. Dissecció de les còniques

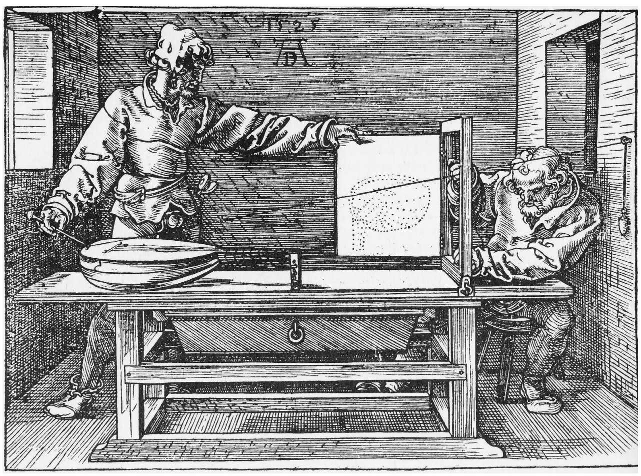


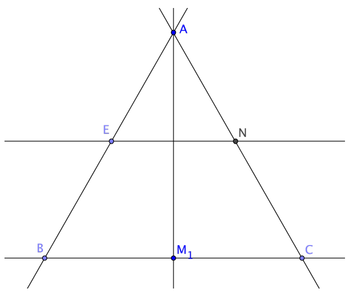
Figura 1.1: Com dibuixar una perspectiva, visió renaixentista (Albrecht Dürer)

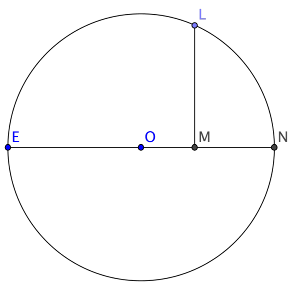
2. Treball amb GeoGebra
   2.1. Creació de seccions segons les propietats mètriques
   2.2. Propietats de raigs focals
   2.3. Els diàmetres segons Apol·loni
   2.4. El Teorema de Steiner
   2.5. La raó doble i les còniques

2 Introducció

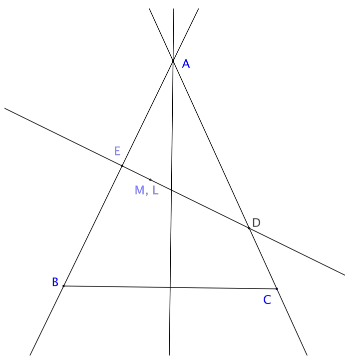
Definició 2.1 (Apol·loni). *Si, d'un cert punt, tracem una circumferència de cercle, no situat en el mateix pla del punt, una recta d'un punt a l'altre, i si, deixant el punt fix, la recta, girant seguint la circumferència, torna a la posició on ha començat a moure's, anomeno* superfície cònica *aquella que, descrita per la recta, està composta de dues superfícies oposades segons el vèrtex, on cada una creix cap a l'infinit, la recta generatriu es prolonga cap l'infinit. Anomeno* vèrtex *d'aquesta superfície el punt fix, i el seu* eix *la recta determinada pel punt i el centre del cercle.*

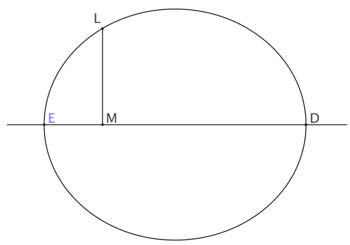
Si la recta que uneix el centre del cercle amb el punt fix és perpendicular al pla del cercle, diem que el con és recte. Quan tallem un con recte de base circular amb un pla perpendicular al seu eix de revolució, trobem sempre una *circumferència*.



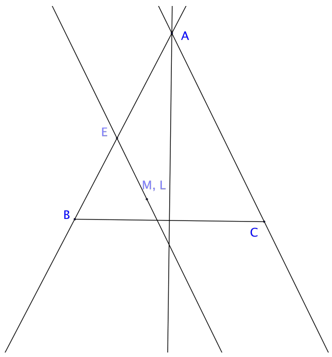


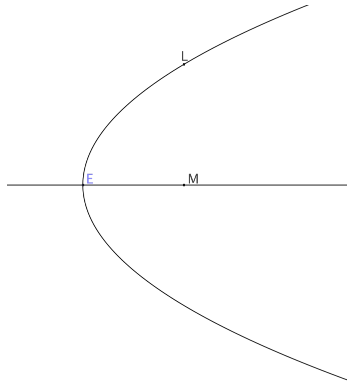
Si ho fem formant angle màxim no recte però menor que el que formen generatriu i eix, trobem sempre una *el·lipse*.



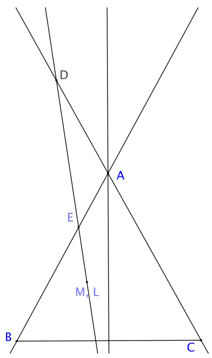


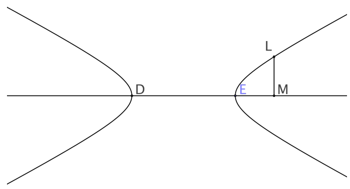
En paral·lel a la generatriu obtindrem una *paràbola*.





Altrament, una *hipèrbola*.





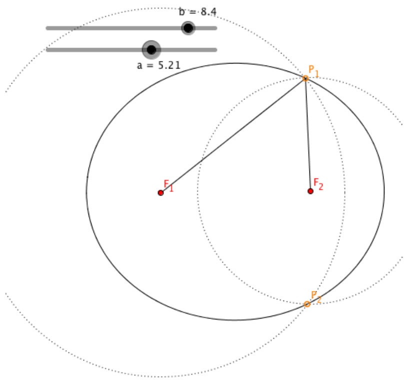
Això és tot?

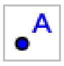
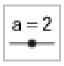
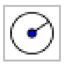
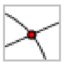
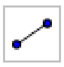
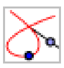
El que farem a continuació parteix essencialment de les Seccions Còniques d'Apol·loni [Per13] i del llibre d'Eduardo Casas-Alvero [CA14].

3 Treball amb GeoGebra

3.1 Creació de seccions segons les propietats mètriques

3.1.1 Construcció d'una el·lipse



Icona	Descripció
	Crea dos punts F_1 i F_2, que seran els focus de l'el·lipse. Per fer-ho, et caldrà canviar el nom dels punts creats per F_1 i F_2 respectivament.
	Crea dos punts lliscants: b (mínim 0, màxim 10) serà la suma de les distàncies als focus. El nombre a (mínim 0, màxim b) serà el primer dels radis.
	Traça dues circumferències. Una de centre F_1 i radi a. L'altra de centre F_2 i radi $b - a$.
	Troba les interseccions P_1 i P_2 de les dues circumferències.
	Traça els segments de P_1 al dos focus. Activa la traça de P_1. Comprova què passa al variar a. Desactiva la traça i clica al menú *Visualitza > Actualitza*.
	Troba els llocs geomètrics de P_1 respecte a i de P_2 respecte a.
	Edita les propietats dels diferents elements per aconseguir un gràfic com el representat aquí.

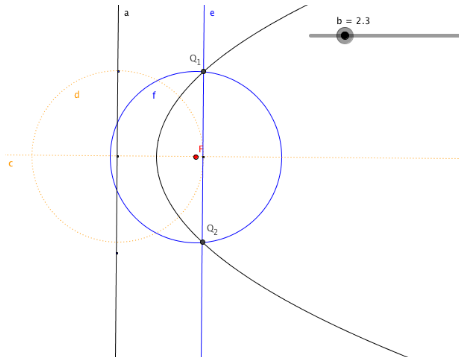
Espai de reflexió

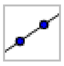
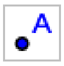
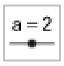
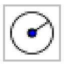
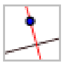
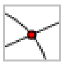
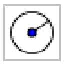
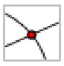
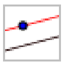
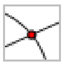
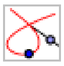
La suma de la distància de cada punt de l'el·lipse als focus és b per construcció. Apareix en algun altre lloc? Per què?

Què passa si fem a massa petit? Per què? Pots editar els límits del punt lliscant perquè això no passi...

Fixa't que hem definit el lloc geomètric a partir de dues parts, dues corbes diferenciades. Et recorda alguna propietat algebraica de l'el·lipse?

3.1.2 Construcció d'una paràbola



Icona	Descripció
	Crea una recta a per dos punts A i B. Oculta els punts.
	Situa el focus F.
	Crea un punt lliscant b de valors entre 0 i 10.
	Crea un cercle f de centre F i radi b.
	Dibuixa l'eix de la paràbola: recta perpendicular a a passant pel focus.
 	Troba la seva intersecció amb a. Des d'aquest punt, crea una circumferència de radi b.
 	Traça la paral·lela a a que passa pel punt de tall entre aquesta circumferència i l'eix de la paràbola.
	Troba les dues interseccions del primer cercle f amb aquesta recta.
	Troba els llocs geomètrics d'aquests dos punts respecte b.
	Edita les propietats dels diferents elements per aconseguir un gràfic com el representat aquí.

Espai de reflexió

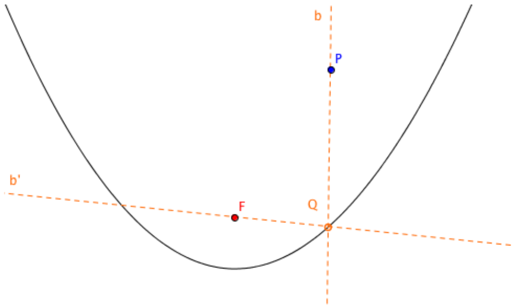
Com traduiries la propietat que hem fet servir per construir la paràbola a un llenguatge matemàtic?

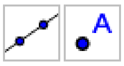
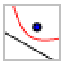
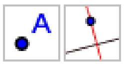
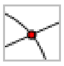
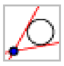
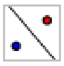
Més enllà

Ets capaç de construir la hipèrbola per aquests mètodes?

3.2 Propietats dels raigs focals

3.2.1 L'antena parabòlica



Icona	Descripció
	Traça una recta (serà la recta generatriu) i el focus F.
	Traça la paràbola corresponent.
	Traça la perpendicular b a la generatriu per un punt P.
	Interseca la recta amb la paràbola.
	Dibuixa la tangent a la paràbola per aquest punt.
	Troba la recta simètrica al raig b respecte a la tangent. Observa què passa al bellugar P.

Espai de reflexió

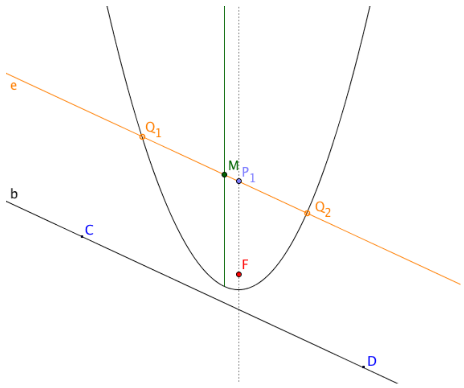
Quin significat té l'antena parabòlica? Ets capaç d'idear un sistema de telecomunicacions amb dos paraigües?

Més enllà

Crea una figura anàloga amb l'el·lipse. En aquest cas, enlloc de la recta b, caldrà traçar una semirecta des del focus a un punt P. La resta de la construcció és anàloga. Què passa?

I en la hipèrbola? què passa amb un raig de llum que surti del focus d'una "antena hiperbòlica"?

3.3 Els diàmetres segons Apol·loni



Icona	Descripció
	Crea dos punts A i B. Crea una recta a per A i B i oculta els dos punts.
	Crea un punt F i traça la paràbola de focus F i directriu a. Oculta a.
	Fes una recta d que passi per F, perpendicular a a. Es tracta de l'eix de la paràbola.
	Crea dos punts més, C i D i la recta b que els uneix.
	Fes un punt P_1 sobre l'eix de la paràbola, situat a l'interior d'aquesta. Crea una recta paral·lela a b pel punt P_1.
	Troba les interseccions amb la paràbola, Q1 i Q2.
	Troba el seu punt mig M. Observa què passa quan mous P1.
	Calcula el lloc geomètric de M al variar P1. Observa el resultat de variar C i D.

Espai de reflexió

Per què passa això? Fixa't en la finestra algebraica. Quines coordenades té cada punt de la paràbola? Quines coordenades tenen punts corresponents Q1 i Q2? Quines coordenades té M?

Si poses la generartiu i el focus de manera que la paràbola sigui vertical, t'ajudarà a analitzar les dades. Si a més converteixes els números que veus en relacions algebraiques, èxit assegurat!

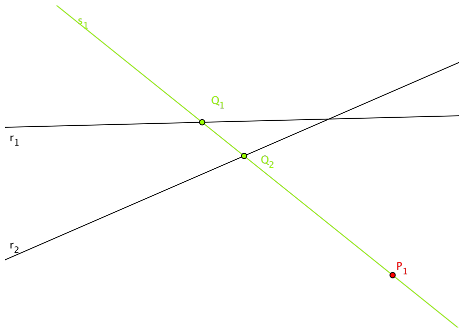
Més enllà

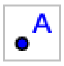
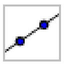
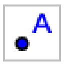
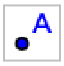
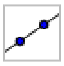
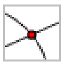
Definició 3.1 (Definició IV). *Dic diàmetre de tota línia corba situada en un sol pla la recta que, feta en la línia corba, talla en dues parts iguals totes les línies rectes fetes en la línia (corba) paral·lelament a una recta qualsevol.*

Hem trobat doncs els diàmetres d'una paràbola. Troba els de l'el·lipse i la hipèrbola.

3.4 Teorema de Steiner

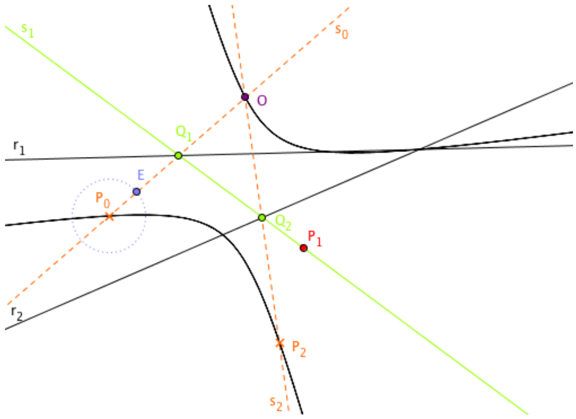
3.4.1 La perspectiva



Icona	Descripció
 	Crea dues rectes r_1 i r_2 concurrents en un punt A i oculta els punts que hagis fet servir.
	Situa el punt de projecció, P_1, fora de les dues rectes.
	Crea Q_1 en la recta r_1.
	Crea la recta s_1 que uneix P_1 amb Q_1.
	Marca el punt Q_2 d'intersecció de r_2 i s_1.
	Observa com varia Q_2 al variar Q_1.

Definició 3.2. *Donades dues rectes r_1 i r_2 i un punt P_1 que no pertany a cap d'elles, anomenem perspectiva de r_1 a r_2 respecte P_1 a la correspondència que un punt de la primera recta a un de la segona si i només si tots tres estan alineats.*

3.4.2 El lloc geomètric



Icona	Descripció
	En la figura anterior, crea dos punts lliures, P_0 i P_2, que no estiguin sobre les rectes anteriors.
	Situa una circumferència entorn de P_0.
	Situa un punt E sobre la circumferència. Assegura't que no canvia la circumferència al moure E.
	Defineix s_0 com la recta per P_0 i E.
	Redefineix Q_1: Escriu Q_1 = Interseca[s_0,r_1] a la línia d'ordres.
	Defineix s_2 com la recta per Q_2 i P_2.
	Troba el punt d'intersecció O entre s_0 i s_2. Observa la traça d'aquest punt al variar E.
	Crea el lloc geomètric d'aquest punt respecte E.

Espai de reflexió

Aquesta aplicació és una comprovació que *Teorema de Steiner* es compleix. Ets capaç de conjecturar el Teorema de Steiner? Què passa si les rectes són paral·leles? I si els P_j estan alineats? Quan es crea cada cònica? Què és una cònica degenerada?

Pots substituir qualsevol P_j per un punt a l'infinit, és a dir, treballar amb rectes paral·leles a una de donada!

3.4.3 Steiner dual

Torna a construir una perspectiva entre dues rectes r_1 i r_2 i tot seguit projecta el punt resultant a una tercera recta r_3 amb una projecció diferent. Uneix el punt inicial i el punt final mitjançant una recta i activa'n la traça. El resultat és espectacular, i es coneix com a Teorema de Steiner dual.

3.4.4 Creativitat al poder

Hi ha altres projectivitats que pots enllaçar en el mètode. En particular, simetries respecte a una recta i perspectives d'una cònica a una recta (o viceversa) des d'un punt d'aquesta. Si sortim d'una recta o una cònica no degenerada i acabem en una altra, la projecció de de dos punts ens acaba donant com a lloc geomètric una cònica pel mateix procediment.

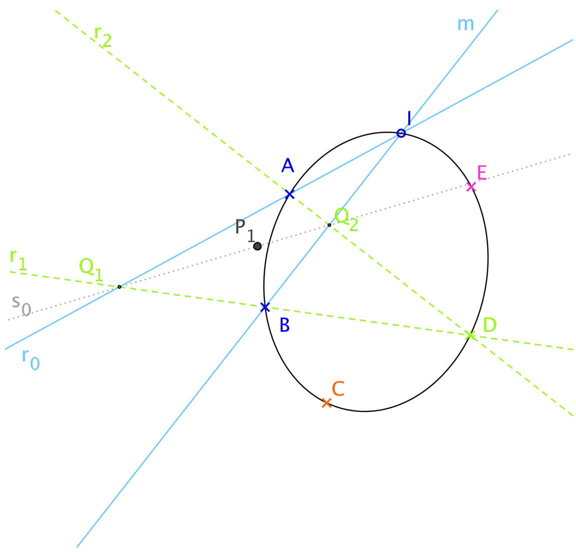
Per exemple, crea una recta per un punt inicial, troba la intersecció Q_1 amb una recta donada , troba la paral·lela a l'eix d'una paràbola que passi per Q_1. Troba la intersecció Q_2 amb la paràbola. Crea una recta que uneixi Q_2 amb, per exemple, el vèrtex de la paràbola. La recta final i la recta inicial es tallen en un lloc geomètric. Troba'l.

Pots continuar la seqüència tant com vulguis utilitzant més projectivitats concatenades.

3.4.5 La cònica dels cinc punts

Per cinc punts qualssevol del pla (si no hi ha massa punts aliniats) hi passa una i només una cònica. Al GeoGebra hi ha una instrucció específica per trobar-la. Pots dibuixar cinc punts, A, B, C, D i E i traçar una cònica que passi pels cinc punts, ja sigui amb la icona (coincideix amb el logotip del programa!) o amb la instrucció *Cònica[A,B,C,D,E]*.

La proposta és la següent: Troba un punt P_1 i un parell de rectes r_1 i r_2 de manera que la projectivitat de r_1 en r_2 doni precisament la cònica que has dibuixat utilitzant el Teorema de Steiner per $P_0 = A$ i $P_2 = B$.



Pista: Pren per rectes AD i BD, per exemple, i estudia què cal que passi perquè les rectes AC i AE vagin a BC i BE.

3.5 La raó doble

Definició 3.3. *Donats tres punts d'una recta, A, B i C, diem que* $\lambda = \lambda(A, B, C)$ *és la raó simple de C respecte* $\{A, B\}$ *si* $\vec{BC} = \lambda\, \vec{AC}$.

Definició 3.4. *Donats quatre punts d'una recta, A, B, C i D, aleshores definim la raó doble*

$$\rho(A, B, C, D) := \frac{\lambda(A, B, C)}{\lambda(A, B, D)}.$$

Definició 3.5. *Donats quatre punts d'una recta, A, B, C i D, diem que els dos primers divideixen harmònicament els altres dos si*

$$\rho(A, B, C, D) = -1.$$

En aquest cas, diem que D és el quart harmònic de C respecte $\{A, B\}$.

- Fer una aplicació que calculi la raó doble de quatre punts aliniats.
  - Crea una recta.
  - Situa quatre punts A, B, C i D sobre la recta.
  - Crea els vectors $v_1 = B - A$, $v_2 = C - A$
  - Calcula l'escalar $\lambda = v_2/v_1$. Pots crear una eina que automatitzi el procés: a través del menú *Eina > Crea una eina nova*, crea una eina que doni com a sortida el nombre complex i com a entrada els tres punts.
  - Repeteix amb l'altre punt i calcula la raó doble.
- Com canvia la raó doble si reordenem els punts?
- Estudiar la raó doble en les projectivitats.
  - Crea una projecció com al principi de l'activitat 3.4.
  - Crea tres punts de sortida, calcula la seva projecció i calcula la raó abans i després.
  - Crea un punt més i calcula ara la raó doble dels quatre.
  - Què succeeix?
  - *Nota*: usant el menú d'eines altra vegada, crea una eina que generi el punt de sortida en funció del punt d'entrada.
- Estudiar la raó doble i les còniques.
  - Crea una cònica i un punt exterior P. Crea una recta que passi per P i talli la cònica.
  - Troba els dos punts de tall. Com trobaràs el quart harmònic? Fes-ho!
  - Troba el lloc geomètric del quart harmònic. Què ha resultat? Troba la relació d'aquest objecte amb les tangents de de P.
  - Què passa si P és interior a la cònica?
  - Què és la recta polar d'un punt repecte a una cònica?
- En un quadrilàter complet, dues diagonals tallen la tercera harmònicament.

Referències

[CA14] Eduardo Casas-Alvero. *Analytic Projective Geometry.* European Mathematical Society, 2014.

[Per13] Apollonius of Perga. *Treatise on conic sections.* Cambridge University Press, 2013.